

Vendredi 18 janvier 2008
Université Paris-IV Sorbonne
Agrégation de philosophie 2008
Oral
Leçon 1: La logique et l'épistémologie
Cours de M. Chareix
Henri Babaud de Monvallier

Qu'apporte au mathématicien l'histoire des mathématiques?

Introduction

Les mathématiques sont à la fois le domaine de connaissance se rapportant aux objets que sont les nombres, les figures, les structures et les changements, les études et recherches portant sur ce domaine et l'enseignement de cette discipline.

Parmi les sciences, elles entretiennent avec le réel un rapport particulier, en ce qu'elles semblent n'avoir aucun contenu sensible; on peut donc dire que les mathématiques sont formelles et *a priori*, car indépendantes de l'expérience. Même s'il n'existait aucun cercle dans la nature, il serait toujours possible à l'esprit humain de concevoir les propriétés du cercle. Paradoxalement, les mathématiques trouvent des applications très variées dans les autres sciences (notamment dans certains domaines de la physique) et dans la technique.

Le mathématicien pourrait à la limite ne travailler que sur des objets purement idéels sans se soucier de leur adéquation avec le réel. Les mathématiques ont en effet ce caractère d'être vraies intemporellement (la formule pour mesurer le diamètre du cercle ne change pas selon les siècles) et d'aller toujours du nécessaire au nécessaire par la méthode hypothético-déductive.

Cependant, un aperçu rapide sur l'histoire de la discipline met en doute cette belle évidence que les mathématiques seraient hors du temps et de la contingence. A considérer l'une des procédures centrales en mathématiques, la démonstration, on verra que ce qu'Euclide pouvait entendre par ce terme est bien différent de ce que l'on exige au XX^{ème} siècle. Des mathématiciens non seulement ne considéreront pas les mêmes axiomes ou les mêmes postulats fondamentaux, mais encore ils ne donneront pas la même définition d'un même objet.

L'histoire des mathématiques, loin donc de se confondre avec un long fleuve tranquille, est faite, comme toute science, de ruptures, de crises, d'impasses, de tensions. Or, l'histoire est précisément le domaine du contingent, du devenir et de l'événement (c'est-à-dire de ce qui est nouveau et n'a lieu qu'une fois)

Il nous faut ainsi souligner ce paradoxe que les mathématiques se veulent anhistoriques, mais qu'en même temps, elles ne peuvent échapper à la contingence historique. Le mathématicien semble donc pris en tenaille entre son exigence de dégager des propriétés valables universellement et sa position historique qui le rend tributaire des réussites, des échecs et des tentatives de ses prédécesseurs. *Le mathématicien ne peut ignorer le devenir de sa discipline, mais les mathématiques ne peuvent admettre la contingence.*

Dans ces conditions, on est en droit de se poser la question: qu'apporte au mathématicien l'histoire des mathématiques?

Pour y apporter une réponse, nous établirons dans un premier temps les raisons pour lesquelles on peut dire que le mathématicien entretient avec sa discipline un rapport essentiellement intemporel (moment classique ou apollinien). Dans un deuxième temps, nous montrerons que l'histoire des mathématiques est en fait une histoire des ruptures, des changements et de la remise en cause des fondements les mieux établis (moment baroque). Dans ces conditions, un troisième temps servira à montrer que c'est en affrontant remises en question et changements que le mathématicien peut intégrer à sa démarche de recherche une dimension d'engagement, d'invention et de création (moment dionysiaque).

I Le mathématicien se rapporte à sa discipline de façon anhistorique.

1) Le mathématicien est contemporain des hommes du passé.

Comme tout scientifique, le mathématicien s'inscrit dans son époque. Il travaille donc selon les paradigmes de son temps. Mais il peut aussi bien, par sa discipline, être le contemporain des hommes du passé. On connaît, par exemple, le cas de Pascal, génie précoce démontrant le trente-deuxième postulat d'Euclide à onze ans, s'intéressant à la géométrie à douze et travaillant ensuite sur les coniques de Desargues en publiant son *Traité des coniques* à l'âge de seize ans. Pascal a donc pu s'intéresser autant aux mathématiques grecques qu'à la science de son temps. Mais il n'a pas eu besoin d'une connaissance historique, académique, de sa discipline pour exercer son génie. On voit donc que les mathématiques sont indépendantes de leur histoire. Les problèmes qu'elles posent sont intemporels; ils ne sont pas relatifs à une culture, ils sont valables universellement même s'ils ne peuvent émerger qu'en étant situés historiquement et géographiquement: on peut penser aux machines d'Archimède, aux temples grecs, à l'astronomie, etc. Mais cette situation particulière et contingente est sans incidence aucune sur la validité universelle *a priori* des théories et des applications ainsi développées.

2) Le mathématicien s'intéresse aux problèmes de sa discipline de façon anhistorique.

Le mathématicien ne s'intéresse pas à l'histoire même de sa discipline, mais à des problèmes cruciaux, indépendamment du fait de savoir où et quand ils ont été énoncés pour la première fois. Il est contingent qu'un résultat soit obtenu par un Grec ou un Chinois ou que l'auteur d'une conjecture soit arabe plutôt que français. Le mathématicien parle un langage universel, car les symboles qu'il utilise doivent être sans ambiguïté; ils sont transparents à eux-mêmes, parfaitement définis; ce qu'il démontre est obtenu de manière rigoureuse et nécessaire. La langue mathématique ne souffre donc pas des « impuretés » des langues naturelles, car son sens tend à être entièrement explicite. Si, comme le dit Galilée, « la nature est un grand livre écrit en langage mathématique », alors le mathématicien parle d'objets réels, de structures fondamentales de la nature. Le mathématicien se rapporte donc à sa discipline d'une façon non historique. Il n'oublie pas nécessairement tout ce qui s'est fait avant lui, mais le laps de temps entre lui et son interlocuteur n'importe pas. Formelles, les mathématiques sont aussi anhistoriques; il s'agit d'apprendre les règles du raisonnement juste, car la rationalité de la démonstration et des autres procédures n'évolue pas.

Ainsi, la géométrie euclidienne apparaît naturelle à l'esprit humain, et elle a été celle aussi bien des Grecs, qui ont construit grâce à elle leurs temples, que des Chinois ou des Arabes. Il est d'ailleurs à noter que, quand bien même le postulat de l'impossibilité pour deux parallèles de se croiser, n'est pas formellement établi, comme chez Euclide, il est tenu pour intuitivement valable dans d'autres civilisations.

3) Lorsqu'il se réfère à l'histoire de sa discipline, c'est pour y trouver une exigence qui nourrit ses propres travaux sans qu'entrent dans cette démarche nul devenir ni nulle contingence.

Il faut, malgré ce qui précède, insister, avec Kant, sur l'importance de connaître les travaux des « anciens mathématiciens », en tant qu'ils servent de modèle et d'exemple et en tant, par là même, qu'ils constituent l'occasion de transmettre une exigence de l'esprit humain. Dans le paragraphe 32 de la *Critique de la faculté de juger*, Kant dresse un parallèle entre la littérature et les mathématiques. Les grands écrivains classiques de l'Antiquité semblent constituer, pour tout écrivain qui se respecte, une norme et une référence. En est-il de même du rapport du mathématicien avec ses illustres prédécesseurs?

« Que l'on vante à bon droit les oeuvres des Anciens comme des modèles et qu'on désigne leurs auteurs comme des classiques, comme s'ils constituaient parmi les écrivains une certaine noblesse qui, par l'exemple qu'elle donne, fournit au peuple des lois, cela semble faire référence à des sources *a posteriori* du goût et réfuter l'autonomie de celui-ci en chaque sujet. Seulement, on pourrait tout aussi bien dire que les anciens mathématiciens, tenus jusqu'à aujourd'hui pour des modèles quasiment indispensables de la radicalité et de l'élégance souveraine

de la méthode synthétique, prouvent que, de notre côté, la raison est là aussi imitatrice et témoignent de son impuissance à produire d'elle-même des démonstrations rigoureuses procédant avec la plus haute intuition par construction de concepts. Il n'existe absolument aucun usage de nos forces, si libre qu'il puisse être, ni même de la raison (laquelle doit puiser *a priori* tous ses jugements à la source commune), qui ne s'engagerait dans des tentatives manquées si chaque sujet devait toujours partir intégralement des dispositions brutes, et si d'autres ne l'avaient précédé à travers leurs propres recherches; non pas pour faire que leurs successeurs deviennent de simples imitateurs, mais pour en mettre d'autres sur la voie par leur démarche, afin qu'ils cherchent en eux-mêmes les principes, et suivent ainsi leur chemin propre, souvent meilleur. »

Ce texte montre donc une autre manière d'envisager le rapport anhistorique du mathématicien à l'histoire de sa discipline: ce n'est pas la curiosité empirique ou factuelle de l'historien qui anime le mathématicien; celui-ci cherche d'abord dans sa discipline une exigence intemporelle de l'esprit humain, exigence de rigueur, de rationalité et de persévérance dans le travail sur les problèmes irrésolus dont l'histoire a montré que certains ont pu trouver leur solution. Ce n'est pas l'histoire de la discipline en tant que telle qui importe au mathématicien, mais seulement le fait de trouver dans le passé des travaux d'autres mathématiciens qui nourriront ses propres travaux. Mais ni le devenir ni la contingence n'entrent en ligne de compte : à la limite, les mathématiciens sont comme des visiteurs se promenant dans une grande galerie située en aucun temps et nulle part. Tous parlent la même langue, et tous peuvent donc se comprendre par delà le temps et l'espace. Frege peut ainsi écrire que nous avons besoin « d'un ensemble de signes, purifiés de toute ambiguïté, et dont la forme logique ne laisse pas échapper le contenu » (*Ecrits logiques et philosophiques*).

Les hommes qui servent d'exemple sont des classiques, et les classiques sont intemporels. Leur exemple sert en tous temps et en tous lieux. Ils sont sans cesse à fréquenter, car l'exigence mathématique ne connaît pas de variation fondamentale dans l'histoire. Des théorèmes sont démontrés, d'autres sont invalidés, mais toujours demeure la même volonté de radicalité dans l'établissement du vrai.

Transition: Par la connaissance des travaux de ses prédécesseurs, le mathématicien découvre des modèles de rigueur et des exemples de méthodes pour résoudre des problèmes. Il trouve dans le passé, en quelque sorte, un legs précieux : les résultats des grands esprits, des fondements solides pour ses raisonnements, des systèmes clairs et achevés de connaissance. En disant cela, nous mettons en valeur l'aspect éminemment « apollinien » des mathématiques. Mais l'histoire des mathématiques n'est-elle, pour le mathématicien, qu'un Panthéon ou un Olympe de grandes figures immortelles ? Il nous faut à présent sortir de ces considérations peut-être un peu trop générales pour voir à partir d'exemples précis pris dans l'histoire des mathématiques comment le mathématicien peut découvrir dans l'histoire de sa discipline contingence et devenir.

II Le mathématicien découvre dans l'histoire de sa discipline contingence et devenir.

1) Fermat et le devenir d'une conjecture: de la conjecture de Fermat au théorème de Fermat-Wiles.

On peut déjà noter que le mathématicien ne découvre pas, dans le passé de sa discipline, tous les problèmes achevés et résolus. Le legs historique est celui aussi des travaux inachevés, des tentatives qui n'ont pu être menées à bout. Ainsi de la conjecture de Fermat.

Pierre de Fermat, mathématicien du XVII^{ème} siècle (1601-1665), dit que l'équation : $a^n + b^n = c^n$, avec (a, b, c) donnés et n entier naturel positif, n'a pas de solution lorsque $n > 2$.

Exemple: L'équation $a^n + b^n = c^n$ a une infinité de solutions lorsque $n=1$. C'est à dire qu'il y a une infinité de triplets-solution (a, b, c) à l'équation : $a+b=c$.

De même, lorsque $n=2$, $a^2+b^2=c^2$ a des solutions. On se trouve dans le cas du théorème de Pythagore, où c est la longueur de l'hypoténuse, a et b celles des autres côtés.

La solution la plus célèbre est (3, 4, 5). $3^2+4^2=5^2 \Leftrightarrow 9+16=25$.

Tout triangle dont on sait que ses côtés mesure 3, 4 et 5 est rectangle.

Maintenant, Fermat conjecture qu'il n'y a pas de solution pour $n=3$ ou plus.

En effet, l'équation $a^3+b^3=c^3$ n'a pas de solution.

Autrement dit, en termes géométriques, on peut trouver un segment dont la longueur soit la somme des longueurs de deux autres segments ($a+b=c$), un carré dont la surface soit la somme des surfaces de deux autres carrés ($a^2+b^2=c^2$) mais pas de cube tel, ni de figures de la quatrième, cinquième dimension, etc.

On parle de grand théorème de Fermat. Seulement, l'auteur n'ayant pas fourni de démonstration, on ne peut que parler de conjecture. Ce n'est que grâce à Andrew Wiles que cette conjecture est devenue théorème en 1994, et ce, grâce à des centaines de pages de démonstration mettant en oeuvre des moyens mathématiques inconnus au XVIIème siècle. Si bien qu'à la limite, c'est l'utilisation des outils de démonstration qui a plus d'intérêt que d'arriver à prouver la conjecture. On a retrouvé un manuscrit annoté de la main de Fermat, où il affirme : « J'ai une démonstration véritablement merveilleuse de cette proposition, que cette marge est trop étroite pour contenir. » Vraisemblablement, Fermat n'avait pas les moyens de prouver sa conjecture. Mais (qui sait?), comme l'a dit Wiles, peut-être reste-t-il une possibilité infime qu'il existe une solution élégante datant du XVIIème siècle... Toujours est-il que l'on parle maintenant du théorème de Fermat-Wiles.

Philosophiquement, l'intérêt de cette conjecture et de sa démonstration est de montrer que la vérité scientifique n'est pas donnée immédiatement, *sub specie aeternitatis*, comme le dit Spinoza. Maintenant, nous savons que la science est en devenir, et nos connaissances sans cesse révisables puisqu'il a fallu attendre trois cent cinquante ans pour résoudre Fermat.

2) Des objets ambigus: Desargues et la géométrie projective.

L'évolution historique de la discipline est en réalité essentielle, car tout ne peut être résolu d'un coup en mathématiques, en un seul lieu et un seul temps. On dira que chaque mathématicien ne découvre qu'une partie de la vérité, que chacun d'entre eux ne peut obtenir que des résultats partiels. Un résultat valable doit être un résultat démontré et les mathématiciens, comme on l'a vu avec Fermat, posent parfois des conjectures qu'ils ne peuvent démontrer. L'histoire des mathématiques comptent ainsi d'autres conjectures célèbres, comme la conjecture de Goldbach, par exemple, qui posait que tout nombre entier pair supérieur à 2 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers. Cette conjecture a été vérifiée empiriquement avec des ordinateurs calculateurs très puissants mais n'a pas, jusqu'à aujourd'hui, fait l'objet d'une véritable démonstration. L'aventure Fermat-Wiles semble malgré tout nous dire qu'en droit, il nous est permis d'espérer que la conjecture de Goldbach sera un jour démontrée.

Mais le mathématicien ne découvre-t-il dans l'histoire que des certitudes et des raisons de prendre confiance dans sa discipline ? Nous allons voir au contraire que l'étude historique est l'occasion de mises en doute qui peuvent être radicales.

Loin que les grands ancêtres soient des classiques qui nous offrent une vision achevée et pleine du monde, ils sont aussi ceux qui mettent en doute nos certitudes, et nous rappellent que la recherche se fait dans le tâtonnement, l'incertitude, même dans un domaine comme les mathématiques. Il ne suffit pas de respecter toujours la bonne procédure ou de prendre le temps d'accorder sa volonté à son entendement pour ne pas se tromper. Certains objets sont en eux-mêmes douteux.

Prenons l'exemple d'un autre grand mathématicien du XVIIème siècle contemporain de Fermat: Gérard Desargues (1591-1661), mathématicien étudié par Descartes (qui le trouvait obscur) et par le jeune Pascal. Dans son *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan* (1639), Desargues travaille sur les coniques et leur perspective. La nouveauté arguésienne est de remarquer que, dans une perspective s'étendant à l'infini, des droites parallèles finissent par devenir concourantes, tandis que des concourantes, par perspective, peuvent devenir parallèles. Ces droites ont un point commun situé à l'infini. Ainsi, par perspective, les points de l'espace ordinaire et les points fictifs situés à l'infini peuvent-ils échanger leurs propriétés. Le

cône pourra devenir cylindre par perspective et le cylindre, cône. Desargues peut réunir ces deux volumes sous l'appellation de rouleaux. Notre mathématicien dit que c'est « sous une seule et même énonciation » que l'on peut parler des cônes et des cylindres.

La découverte de l'infini et de ses paradoxes bouleverse donc le cadre de pensée hérité de la Grèce, cadre qui refusait l'infini, comme illimité, inachevé. On peut bien parler du passage d'un cosmos organisé à une nature géométrisée, du « monde clos à l'univers infini » (Koyré). L'avancée de Desargues est aussi une cassure dans le modèle de stabilité offert par les mathématiques, et on pourrait proprement parler de vision baroque avec ces perspectives changeantes, mouvantes, qui peuvent devenir une chose ou l'autre selon le point de vue. Desargues a donc permis de faire avancer la théorie des transformations, qui permet de penser le passage d'une figure à une autre, quitte à ce que cette « seule et même énonciation » devienne un pur problème de langage, détaché de considérations géométriques. Si certains objets sont ambigus, changeants, ils permettent aussi au mathématicien de penser le changement, quitte à réintroduire du dynamisme dans des objets statiques. Mais on dira que si certains objets se prêtent à une telle mobilité, il n'en va pas de même des principes fondamentaux, ou des procédures les plus indispensables, qui, elles, sont achevées, définitives.

Mais qu'en serait-il si ce que l'on appelle démonstration, cette procédure fondamentale, avait, elle aussi, changé de sens au cours du temps ?

3) Euclide revisité (épisode 1): Hilbert et la réaxiomatisation formelle des mathématiques.

Arrêtons-nous sur un autre épisode marquant de l'histoire des mathématiques: la réaxiomatisation des mathématiques euclidiennes traditionnelles par Hilbert à la fin du XIX^{ème} siècle.

Dans la proposition 4 du livre I des *Eléments* d'Euclide, il s'agit d'établir, par exemple, l'identité de deux triangles ABC et DEF. La démonstration d'Euclide, à bien des égards, paraîtra étrange. Il n'hésite pas, en effet à recourir au sens commun, en faisant appel à la possibilité de superposer un triangle sur l'autre, à ajuster une droite ou des angles, comme si l'on manipulait des figures en bois, par exemple. Ainsi, la position d'Euclide est réaliste. Le triangle existe vraiment dans la nature, et il ne faut pas hésiter à faire appel à l'évidence matérielle pour démontrer l'égalité de deux triangles.

Or, pour un mathématicien moderne, il n'est plus possible de considérer l'évidence sensible comme gage du vrai. Au contraire, on dirait que le recours à l'évidence entache la démonstration d'impuretés et qu'Euclide commet l'erreur de demeurer trop réaliste. Et, restant réaliste, il ne parvient pas suffisamment à démontrer, par les seuls moyens du langage mathématique, ses postulats. C'est au XIX^{ème} siècle que l'on s'intéresse de nouveau aux *Eléments*, pour découvrir qu'ils ne satisfont plus aux exigences du temps: il faut passer des postulats (qui font encore appel à l'évidence sensible) aux axiomes (qui sont, eux, d'ordre purement logique et intelligible). Le mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) se proposera de redémontrer l'ensemble du corpus euclidien. Dans les *Fondements de la géométrie* (1899), il remplace les cinq postulats fondamentaux d'Euclide par vingt et un axiomes, censés être irréfutables. Au lieu de se concentrer sur la nature « réelle » des objets considérés (figures, points, plan, etc.), on s'intéressera uniquement à leur définition langagière et à leurs relations entre elles : le triangle n'est pas une figure à trois côtés mais seulement trois points non alignés. Les termes ne renvoient plus à une signification extérieure. Seuls les termes fondamentaux, les axiomes, renvoient à des faits fondamentaux donnés par intuition. Le but de Hilbert était donc de reprendre entièrement Euclide pour le clarifier et l'épurer de ses faiblesses. Refusant l'appel à du hors-langage, Hilbert tend donc à éliminer la question du sens en mathématiques, pour arriver à un fonctionnement purement formaliste : les objets mathématiques sont réduits à des objets de discours. Toutefois, Hilbert conserve une part d'intuition, et pourra donc dire qu'en mathématiques se trouvent deux tendances, l'une qui va vers l'abstraction, l'autre qui va vers une compréhension intuitive des objets.

Au cours de l'histoire, on voit donc que les mathématiciens eux-mêmes ont mis en

danger les fondements de leur discipline, à savoir non seulement le statut des objets, mais aussi leur signification.

Même l'évidence n'est pas épargnée. On l'a vu avec Desargues, puis avec Hilbert. On le verra encore mieux à partir de l'exemple des géométries non euclidiennes.

4) Euclide revisité (épisode 2): ou comment Lobatchevski invente la première géométrie non euclidienne en cherchant à démontrer un postulat d'Euclide.

Le mathématicien russe Nikolai Lobatchevski (1792-1856) se proposait de démontrer rigoureusement l'un des postulats les plus célèbres d'Euclide, le cinquième, celui qui énonce que par un point extérieur à une droite on ne peut faire passer qu'une seule droite parallèle à la première. Ce qui revient à énoncer que deux parallèles ne sont pas concourantes. Ce postulat est considéré comme l'un des plus évidents, et il a été repris par des mathématiciens aussi bien arabes ou chinois, sans qu'ils aient eu connaissance d'Euclide. Comme si ce postulat était l'un des plus intuitifs, qu'il était en quelque sorte consubstantiel à l'esprit humain. Mais on peut déjà se souvenir que Desargues, avec sa géométrie projective, mettait en danger cette évidence.

Le point de départ de Lobatchevski, pour sa part, était d'établir fermement ce postulat de manière à en faire un véritable axiome. La méthode employée par le mathématicien russe était une procédure parfaitement incontestable : la démonstration par l'absurde. Puisque l'on ne pouvait montrer directement la vérité du cinquième postulat, il fallait montrer qu'une géométrie fondée sur le postulat inverse finissait par se contredire, qu'elle était par conséquent fautive.

La surprise de Lobatchevski fut de découvrir que son système non euclidien restait parfaitement cohérent. Il ne découvrait aucune contradiction. Ainsi, sans avoir invalidé Euclide, il montrait qu'une autre conception géométrique de l'espace est possible, que la loi de l'espace n'est pas intuitivement perçue par l'esprit. Le postulat d'Euclide a été ainsi remplacé non pas par un axiome, mais par un autre postulat contre-intuitif que l'on appelle « postulat de Lobatchevski »: par tout point extérieur à une droite il passe une infinité de parallèles à cette droite.

La découverte de la possibilité de géométries non euclidiennes a deux conséquences majeures: d'une part, l'existence de ces géométries met en question l'apriorisme kantien qui se fonde sur un concept d'espace euclidien en tant que forme de la sensibilité externe; d'autre part, ces géométries non euclidiennes mettent en question ce que l'on appelle « vrai » en mathématiques. Si deux géométries peuvent coexister, chacune étant cohérente, laquelle est la plus « vraie »? Les géométries non euclidiennes ont ainsi contribué à la fois à élargir la notion d'espace et à la rendre plus floue.

Transition: Ces quelques aperçus nous ont donc permis d'établir que l'histoire des mathématiques est aussi celle des rencontres, des contingences, des ruptures, des surprises et des remises en question. Le mathématicien ne peut donc espérer trouver dans l'histoire de sa discipline une paisible promenade dans un Parthénon ou un Panthéon, mais plutôt, sur le mode dantesque, l'imprévu au sein d'une forêt pleine d'impasses.

L'aventure d'Euclide et de ses remises en cause porte atteinte à la notion d'évidence et d'invariance de la procédure démonstrative, tandis que l'aventure de Fermat-Wiles nous a montré que le domaine des mathématiques, tout comme celui de la physique, de la biologie, des sciences humaines, de la musique ou de la littérature est inachevé et en devenir.

Après avoir montré que l'histoire des mathématiques fournit aussi bien un modèle de rigueur et d'exigence que l'expérience du tâtonnement et de l'incertitude, il faut tâcher à présent, dans un troisième et dernier moment, de voir les rapports entre la discipline des mathématiques et son épistémologie ainsi que ses rapports avec l'épistémologie des sciences historiques en général.

III L'histoire des mathématiques apporte au mathématicien sens des problèmes et goût de l'invention.

1) Mathématiques, récit et histoire

Peut-être n'avons-nous pas suffisamment distingué jusqu'ici les deux sens usuels du

mots « histoire »: à savoir les faits et événements, d'une part, et le récit sur ces mêmes faits et événements, d'autre part- ou, pour le dire autrement, entre l'Histoire avec un grand « H » (au sens où Hegel parle de « la raison dans l'Histoire ») et l'histoire avec un petit « h », c'est-à-dire, l'historiographie qui met en récit et en intrigue (selon l'expression de Ricoeur dans *Temps et récit*) les faits et événements qu'elle rapporte de manière rétrospective. Jusqu'à présent, nous avons considéré l'expression « histoire des mathématiques » au premier sens. Essayons maintenant d'insister davantage sur le second sens (l'historiographie des mathématiques) pour renouveler notre problématisation.

Dans sa préface à *Une Histoire des mathématiques* d'Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer (1986), Jean-Toussaint Desanti notait qu'en mathématiques comme ailleurs on ne peut pas faire l'économie du récit ordonné des fait concernant le champ historique dont on s'occupe. Mais l'histoire est aussi explication de la genèse et du devenir de la chose étudiée. Et ce n'est que par le récit que l'on peut saisir une évolution de part en part historique. Ce qui pose le problème des invariant historiques tel que l'étudie Paul Veyne dans sa leçon inaugurale du Collège de France *L'Inventaire des différences* (1976).

Qui dit histoire dit mémoire, c'est-à-dire préservation et recollection des faits du passé. Le mathématicien n'échappe pas à l'évolution de sa discipline. Et s'il veut oublier le passé, il risque surtout de passer à côté de son temps, faute de comprendre comment il s'est construit par rapport à ce qui le précède. S'il n'est pas possible de reprendre exhaustivement tout ce qui s'est fait sous le nom de mathématiques, il n'en demeure pas moins indispensable au mathématicien de rejouer certains événements cruciaux de l'histoire de son domaine. Il trouvera ainsi non seulement le sens de ce qu'il fait, mais encore, loin de connaître comment certaines procédures ont réussi ou échoué, il comprendra ce qu'est la passion propre au mathématicien :

« Les mathématiques ne sortent pas toutes faites de la tête du maître qui écrit au tableau noir. Elles ne résident pas, toutes faites, dans le traité, si achevé en sa belle ordonnance. Nullement. Leur état présent et décanté, par quoi nous commençons de les apprendre, n'est lui même qu'une figure d'équilibre, précieuse aujourd'hui, mais transitoire comme d'autres qui l'ont précédée et dont elle porte la marque. Apprendre à déchiffrer ces marques, c'est réveiller la mémoire. Le moins qu'on puisse y gagner, c'est un peu d'humour. On apprendra la peine qu'a coûté le moindre « pont aux ânes » . Mais on y gagnera bien davantage encore: plus de conscience; une autre clarté que celle qui naît de la stricte observance des procédures, parce qu'elle concerne les motivations qui ont exigé ces procédures mêmes. « Pourquoi des mathématiques? » dit-on. Et on ajoute aussi: « A quoi bon? ». Un titre comme celui-ci montre comment « des mathématiques » se sont produites. Il montre quelle sorte de travaux, non homogènes, cette production a coûtés, à quelles exigences, à quelles contraintes internes et externes de tels travaux ont dû se plier. En cela il peut permettre de répondre à la double question « Pourquoi? » et « A quoi bon? » . »

Nous citons ce texte pour insister sur le terme de *motivation*, que celui de « procédure » tendrait à occulter. La motivation est bien au coeur de toute recherche, et l'histoire d'un domaine en porte le témoignage. Le scientifique peut justifier sa démarche selon l'entendement, alors que ce qui l'anime est dans l'imagination, la création, la recherche du plaisir de créer, la joie de voir son système s'animer, devenir vivant.

2) Entrer dans l'histoire, laisser son nom (à un théorème).

Cette dimension de motivation et d'histoire de la discipline a un aspect éminemment institutionnel. Pour publier dans des lieux scientifiques de référence, comme les « Acta Mathematica », la revue « Quadrature » ou bien encore la prestigieuse revue allemande « Journal für die reine und angewandte Mathematik » et ainsi voir valider le caractère scientifique de sa démarche, le scientifique doit masquer les intuitions, les émotions, les tâtonnements, tout l'aspect proprement dionysiaque de la recherche ; rhétoriquement, il réinterprète sa démarche, après coup ; il la reformate pour satisfaire aux standards de scientificité dans la présentation de ses résultats. C'est dire aussi que le scientifique inventera après coup le récit fondateur de sa découverte, comme Andrew Wiles qui dit avoir découvert enfant la conjecture de Fermat, et s'être juré depuis de la

démontrer. Le scientifique doit, institutionnellement, mêler sa petite histoire personnelle à la grande histoire, à caractère mythologique, de la Science pérenne. C'est donc au mathématicien, comme cela est le cas pour tous les autres scientifiques, de montrer ce que ses travaux apportent à l'histoire de sa discipline, quels résultats il léguera à la postérité, ce que l'on retiendra de lui. Il pourra dans le meilleur des cas ajouter son nom dans la galerie des grands ancêtres, tel Wiles accolant son nom à celui de Fermat, une fois la conjecture démontrée, et devenant ainsi en quelque sorte le « co-auteur » du théorème de Fermat.

Pour mieux cerner cette inscription du mathématicien dans l'histoire, on peut encore mieux le montrer sur l'exemple d'un événement, authentiquement historique et mathématique, et en voir les conséquences sur la pratique du mathématicien. On mettra ainsi en valeur, pour finir, le concept d'*événement mathématique*.

3) Un événement mathématique: la crise des fondements

On a parlé à la fin du XIX^{ème} siècle d'une crise des fondements des mathématiques, à un moment où les bases de la discipline s'avèrent fragiles et incohérentes. Frege ou Russell avaient tenté de redonner des assises solides aux mathématiques, de même que Georg Cantor (1845-1918) avec la théorie des ensembles. Mais Russell montre qu'un ensemble ne peut pas sans contradiction s'inclure lui-même. Ce qui est illustré par le paradoxe du barbier: un barbier déclare qu'il va raser tous les hommes de la ville qui ne se rasent pas eux-mêmes. Le barbier doit-il se raser ? Si oui, il ne doit pas se raser, car il se rase lui-même ; si non, il ment, car il ne rase pas tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Donc le barbier n'appartient ni à l'ensemble de ceux qui se rasent, ni à l'ensemble de ceux qui ne se rasent pas. Conclusion de Russell : le barbier n'existe pas. Le paradoxe du barbier est une version imagée de ce que les historiens de la logique appelle couramment « paradoxe de Russell » et que celui-ci expose dans une célèbre lettre à Frege de 1902: la question « L'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même? » est une question insoluble car que l'on réponde par oui ou par non, on est dans la contradiction.

On trouve une intuition sur bien des points similaire chez Kurt Gödel (1906-1978). Gödel pose, avec son théorème d'incomplétude, qu'un système comprenant des éléments algébriques doit supposer des vérités que ce système ne peut pas démontrer par ses seuls moyens. Il ne peut être à la fois cohérent et complet : il ne peut pas tout démontrer ni établir la valeur de vérité de chacune de ses propositions.

D'où l'impossibilité d'une auto-fondation des mathématiques. Trois solutions peuvent alors être apportées, qui sont trois attitudes par rapport au fondement des mathématiques :

- l'intuitionnisme de Luitzen Brouwer (1881-1966);
- le formalisme de Hilbert;
- le logicisme de Russell et Whitehead.

Chaque position a sa validité et ses limites.

La démarche intuitionniste telle que la conçoit Brouwer consiste à critiquer le formalisme qui conçoit les mathématiques comme un langage. Selon lui, le formalisme manque de bases en ce qu'il limite au dénombrable achevé le nombre d'éléments composant le continu en admettant la rationalité bornée des nombres et les coupures de Dedekind. Selon Brouwer, les mathématiques sont intuitives et ne peuvent pas être purement hypothético-déductives.

Le logicisme, qui veut réduire les mathématiques à la logique, se heurte à la difficulté de tout exposer en termes strictement logiques : comment y parvenir de façon concise et claire, sans allonger indéfiniment les démonstrations ?

Le formalisme de Hilbert, se veut, comme on a pu le voir auparavant, d'abord méthodologique. Etant très efficace, il est inévitable qu'il tende à s'illusionner sur sa portée « ontologique »- toute méthode cherchant, en fait, à exprimer la structure même du domaine où elle s'applique. Mais Hilbert conserve une part d'intuition pour ce qui concerne les signes fondamentaux.

Il ne semble donc possible ni de garder l'intuition ni de l'éliminer. On peut alors dire que le but des mathématiques, paradoxalement, est de *construire de l'intuitivement évident*, quitte à bouleverser les règles supposées naturelles de l'entendement. Le formalisme le plus abstrait est alors

un détour indispensable pour en revenir à de l'intuitif, intuitif qui ne peut se suffire à lui-même.

Cette voie a, par exemple, été tracée par le mathématicien allemand Felix Klein (1849-1925) dans un texte célèbre intitulé *Le Programme d'Erlangen* (1872):

«Il ne faut toutefois pas se départir de cette prescription qu'une question mathématique ne doit pas être considérée comme complètement épuisée alors qu'elle n'est pas encore devenue intuitivement évidente ; découvrir au moyen de l'analyse, c'est bien faire un pas très important, mais ce n'est que faire le premier pas. »

Conclusion:

En conclusion, on pourra donc affirmer, au terme de cette réflexion sur l'histoire des mathématiques et sur ce qu'elle apporte au mathématicien, que la recherche mathématique mêle irréductiblement trois aspects: l'intuitif, le théorique et l'expérimental. On peut dire avec Ferdinand Gonseth que l'heuristique doit renoncer à une stratégie de *fondement*, qui vise à un commencement absolu, pour accepter la relativité du domaine de recherche, et adopter ainsi une stratégie d'*engagement* dans son domaine, quitte à revoir au fur et à mesure des avancées les fondements de sa recherche. Le mathématicien accepte ainsi que sa pratique, ses objets et ses méthodes soient en devenir.

On pourra alors distinguer trois sortes d'épistémologie qui peuvent accompagner la pratique du mathématicien:

-une épistémologie de fondement, qui s'interroge sur les règles de légitimation de l'activité scientifique;

-une épistémologie de fonctionnement, qui porte sur les règles et procédures à adopter pour conduire la recherche;

-une épistémologie de problématique, qui s'interroge sur l'évolution et le devenir des théories, dans leur façon d'aborder et de résoudre des problèmes, cette troisième épistémologie permettant d'articuler les deux autres.

On retrouve dans cette tripartition une sorte de modèle kantien : fondement des connaissances, règles pour l'exercice des facultés et problématique de la raison pure. L'apport historique des mathématiques est donc en ce sens intrinsèquement problématique.

Henri BABAUD DE MONVALLIER (en collaboration avec Nicolas ROUSSEAU)

BIBLIOGRAPHIE:

Desanti, Jean-Toussaint, Préface à Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer, *Une Histoire des mathématiques*, Seuil, 1986.

Desargues, *Brouillon project d'une atteinte aux evenements des rencontres du cone avec un plan*, Paris, 1639, 30 p.

Euclide, *Les Éléments*, vol. I, trad. et commentaires de B.Vitrac, PUF, 1990.

Fermat, *Varia Opera mathematica*, éd. Samuel de Fermat, Toulouse, 1679, rééd. Berlin, 1861.

Frege, *Écrits logiques et philosophiques*, trad. C. Imbert, Seuil, 1971.

Lobatchevski, *La Théorie des parallèles*, trad. J. Houël, Fac-simile Blanchard, 1980. Disponible sur Gallica.

Hilbert, *Les Fondements de la géométrie*, éd. franç. critique par P. Rossier, Dunod, 1971.

Kant, *Critique de la faculté de juger*, trad. A. Renaut, GF Flammarion, 1995.

Singh, Simon, *Le dernier Théorème de Fermat*, Hachette Littératures, Pluriel sciences, 1999.

Veyne, Paul, *L'Inventaire des différences*, Leçon inaugurale au Collège de France, Seuil, 1976.

Wiles, Andrew, « Modular elliptic curves and Fermat's last theorem », in « Annals of Mathematics », 141 (3), 1995, pp.443-551.